Questions de cours

Forme algébrique : $z = a + jb \qquad \bar{z} = a - jb$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta = \arg(z) = \arctan(b/a)$

$|z| = |\bar{z}|$

$\arg(z) = -\arg(\bar{z})$

$z = \rho e^{j\theta} \; ; \; \bar{z} = \rho e^{-j\theta}$

Elingage

On appelle $\vec{P}$ le poids de la charge, $\vec{T}$ la tension du câble principal, et $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ les tensions des deux câbles de gauche et droite.

Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.

$\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ont la même composante verticale, donc

$$||\vec{T}||^2 = -\vec{T}.(\vec{T_1} + \vec{T_2}) = -2\vec{T}.\vec{T_1} = 2||\vec{T}||.||\vec{T_1}||\cos(\alpha/2),$$

et finalement $||\vec{T_1}|| = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)}$.

$T_1 \leq mg$ autrement ça casse

Pour que le système tienne, il faut que $||\vec{T_1}||$ soit ~~supérieur~~ inférieur à mg, donc $2\cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$, donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit 120°.

Parachute

(a) En écrivant la relation l'accélération à la somme des forces, on trouve $ma = mv' = -kv^2 + mg$ d'où l'équation $v' = -\frac{k}{m}v^2 + g$.

(b) Cette équation peut se transformer en $\frac{v'}{v^2 - \frac{gm}{k}} = -\frac{k}{m}$.

Si on note $a = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ et $b = -\frac{k}{m}$, on sait grâce à l'exercice T3 que $v(t) = a\frac{1+Ce^{2abt}}{1-Ce^{2abt}}$.

De plus, $v(0) = a\frac{1+C}{1-C}$, donc $C = \frac{v(0)-a}{v(0)+a}$.

(c) Si on fait tendre t vers l'infini, ab étant ici négatif, on constate que la vitesse tend vers la valeur limite $a = \sqrt{\frac{gm}{k}}$. A.N : la vitesse limite est $v_l = 5,11$ m.s^{-1} soit 18,4 km/h.

(d) Si on appelle v_s cette "vitesse de sécurité", $v_s = 20$ km/h $= 5,56$ m.s^{-1}, on doit résoudre l'équation $v(t) \leq v_s$, i.e $a\frac{1+Ce^{2abt}}{1-Ce^{2abt}} \leq v_s$. Cette expression se transforme en $1 + Ce^{2abt} \leq \frac{v_s}{v_l}(1 - Ce^{2abt})$, soit encore $C(1+\frac{v_s}{v_l})e^{2abt} \leq \frac{v_s}{v_l} - 1$.

Donc on doit avoir $2abt \leq \ln\frac{v_s - v_l}{v_s + v_l} - \ln C$. Comme $ab = -\sqrt{g}\sqrt{k/m} = -g/v_l$, on a donc finalement :

$$t \geq \frac{v_l}{2g}\left(\ln\frac{v_s+v_l}{v_s-v_l} - \ln\frac{v(0)+v_l}{v(0)-v_l}\right)$$

A.N : $t = 0,78$s.

Echantillons statistiques

1) Pour calculer la moyenne du groupe constitué par ces trois sous groupes, il faut tenir compte des effectifs de chacun de ces sous-groupes.

La moyenne du groupe des 40+10+50=100 personnes vaut donc $\frac{40\times170+10\times180+50\times175}{100}=\frac{17350}{100}=173,50\text{ cm}$

2) Si les trois sous-groupes étaient constitués du même nombre de personnes, il suffirait de conséder la moyenne arithmétique des trois valeurs 170,180 et 175. En effet, si on note x l'effectif commun des trois sous-groupes, alors la moyenne générale vaudra $\frac{\cancel{x}\times170+\cancel{x}\times180+\cancel{x}\times175}{3\cancel{x}}=\frac{170+180+175}{3}=175\text{ cm}$